

DESENVOLVIMENTO DE UM APLICATIVO EM PLATAFORMA ANDROID PARA A ANÁLISE ESTRUTURAL DE VIGAS

RODNEI SANTANA AZEVEDO¹
LETÍCIA REIS BATISTA ROSAS²
BRUNO RODRIGUES DOS SANTOS²

RESUMO: Este trabalho tem o intuito de fornecer um aplicativo para a plataforma Android capaz de realizar a análise estrutural linear de vigas não inclinadas para a obtenção das reações de apoio e dos esforços solicitantes, tendo como base a implementação computacional da forma matricial do Método dos Deslocamentos denominada como Método da Rigidez Direta. Os parâmetros para a resolução do elemento de viga foram obtidos através do cálculo das reações de engastamento perfeito e do cálculo da matriz de rigidez do mesmo, tendo estes valores representados por vetores e matrizes, foi criado um sistema de equações e posteriormente foi empregado o método da eliminação gaussiana para a resolução do referido sistema. Como resposta, o aplicativo fornece ao usuário os valores das reações de apoio, e os diagramas de esforço cortante e momento fletor. Foram feitas comparações com o *software* Ftool 4.00 para validar o algoritmo criado e os valores encontrados. Verificou-se que o aplicativo encontrou resultados precisos e, portanto, a implementação computacional desenvolvida pode ser utilizada.

PALAVRAS-CHAVE: Viga; análise estrutural; método da rigidez direta; implementação computacional; Android.

DEVELOPMENT OF AN APP IN ANDROID PLATFORM FOR STRUCTURAL ANALYSIS OF BEAMS

ABSTRACT: This work intends to provide an app for the Android platform capable of performing the structural analysis of non-inclined beams to obtain support reactions and soliciting efforts, the app is based on the computational implementation of the matrix form of the Displacement Method called the Direct Stiffness Method. The parameters for the beam element resolution were obtained by calculating the fixed-end forces and by calculating the stiffness matrix of the same, having these values represented by vectors and matrices a system of equations was created and later the method of Gaussian, elimination was applied for the resolution of said system. Comparisons were made with the software Ftool 4.00 to validate the algorithm created and the values found. It was

¹ Engenheiro Civil, UNEMAT, Av. dois Ingás, 3001, Sinop- MT, CEP 78555-000.

² Professor, Curso de Engenharia Civil, FACULDADE FASIFE, R. Carine, 11, Res. Florença, Sinop - MT. CEP: 78550-000. Endereço eletrônico: engenharia@fasipe.com.br

verified that the application found results with great precision and therefore the computational implementation developed can be utilized.

KEYWORDS: *Beam; structural analysis; stiffness matrix method; computational implementation; Android.*

1. INTRODUÇÃO

Vigas são elementos estruturais feitos de aço, madeira, concreto, entre outros materiais, que estão sujeitos a cargas transversais e dão sustentação horizontal à construção, transmitindo esforços a outros elementos como colunas e pilares. Para saber como a viga vai reagir a estas cargas e conseqüentemente poder dimensioná-la da forma correta, é necessário ser feita a análise estrutural deste elemento.

A análise estrutural é uma parte crucial na elaboração de qualquer projeto dentro do âmbito da Engenharia Civil, ela consiste em idealizar sistemas simplificados que relacionam diversos parâmetros a fim de construir um modelo de análise cujos resultados permitem prever o comportamento da estrutura. Por meio da análise estrutural são determinados os esforços de reação e os esforços solicitantes no elemento analisado e a partir deles são obtidas as tensões, deformações e os deslocamentos da estrutura.

Para se fazer esta análise em estruturas isostáticas, são utilizados métodos mais simples que se baseiam no conceito de equilíbrio estático, porém para estruturas hiperestáticas é preciso recorrer a métodos mais complexos. Os mais utilizados para este fim são o Método das Forças, o Método dos Deslocamentos e o Método dos Elementos Finitos, sendo este último o mais utilizado em programas automatizados. O Método dos Deslocamentos em sua forma matricial também pode ser facilmente implementado computacionalmente, sendo que nesta forma recebe o nome de Método da Rigidez Direta.

Os métodos implementados computacionalmente facilitam projetos de estruturas, que exigem uma sucessão de análises e modificações nas suas características, com o intuito de garantir uma solução satisfatória, tanto em termos econômicos quanto nos quesitos funcionais e regulamentares (AZEVEDO, 2003).

Existem vários *softwares* que fazem a análise estrutural de estruturas isostáticas e hiperestáticas no mercado, porém muitos destes *softwares* são pagos e robustos o que dificulta o seu uso no âmbito acadêmico, dificultando o contato do discente com este tipo de ferramenta. O ideal seria o acesso a este tipo de ferramenta de forma mais simples e direta, como o uso de um *smartphone*.

O uso de *smartphones* na sociedade atual é um fenômeno que vem crescendo a cada ano. Uma pesquisa feita pela *GSM Association* (2017) mostra que o número de *smartphones* em uso no mundo é da ordem de 2,5 bilhões, número que representa cerca de 32,9% da população mundial. É evidente o quanto os smartphones estão presentes na nossa vida cotidiana, e não seria diferente no âmbito acadêmico.

Entender os princípios da análise estrutural é um requisito básico para qualquer engenheiro civil, e a forma como este conhecimento é obtido e repassado é

crucial para a boa aplicação dos métodos citados, tanto no ambiente acadêmico quanto no meio profissional. Com o auxílio de novas tecnologias como o *smartphone* é possível tornar o ensino desses conceitos mais fácil e interativo.

Neste contexto, foi desenvolvido um aplicativo em plataforma Android que permite a análise automática dessas estruturas hiperestáticas através da implementação do Método da Rigidez Direta, desenvolvido em linguagem Java em conjunto com a linguagem XML, permitindo oferecer uma ferramenta portátil na área de análise estrutural a fim de ajudar na interação ensino-aprendizagem.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Análise Estrutural

Martha (2010) descreve que a análise estrutural moderna trabalha com quatro níveis de abstração que foram baseados na concepção da modelagem em computação gráfica idealizada por Gomes e Velho (1998) e no conceito de análise estrutural de Felippa (2001). Estes conceitos são divididos em níveis e pode ser vistos na figura 1. O primeiro deles é o nível que faz a abstração do mundo físico e representa a estrutura real. O segundo nível é o modelo analítico que é utilizado para representar matematicamente a estrutura. O terceiro nível é o modelo discreto, onde o comportamento analítico é substituído por um comportamento discreto, em que as variáveis analíticas são substituídas por parâmetros que dependem do método de análise utilizado. O quarto e último nível é o modelo computacional, que basicamente se trata de uma simulação computacional do comportamento da estrutura baseado nos modelos anteriores.

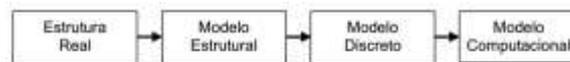


Figura 1: Os quatro níveis de abstração na análise estrutural

Fonte: MARTHA, 2010

Quando se trata de estruturas isostáticas os procedimentos de cálculo são mais simples e não acarretam tantos problemas para sua resolução. É possível resolver este tipo de estrutura utilizando apenas os conceitos de equilíbrio estático, porém o mesmo não ocorre para estruturas hiperestáticas. Para este tipo de estrutura, é necessário levar em conta as condições de equilíbrio, compatibilidade e as leis constitutivas dos materiais, elevando o seu grau de complexidade e podendo comprometer sua resolução. Assim se faz necessário a definição de metodologias que resolvam estas estruturas hiperestáticas de forma a satisfazer simultaneamente todas as condições impostas. A partir destas considerações, dois métodos básicos da análise estrutural foram criados, o Método dos Deslocamentos e o Método das Forças.

2.2 Método das Forças

O Método das forças tem este nome, pois as incógnitas principais dele são as forças ou momentos, podendo ser tanto esforços internos quanto reações de apoio.

Basicamente este método tem por princípio determinar uma solução que satisfaça as condições de equilíbrio e as condições de compatibilidade (MARTHA, 2010).

Segundo Soriano e Lima (2006) a sistemática deste método consiste em se selecionar redundantes estáticas cujas restrições são retiradas assim tornando a estrutura hiperestática em isostática, sendo este modelo chamado de sistema principal. Após selecionado o sistema principal, é necessário se escrever equações de compatibilidade de deslocamentos, utilizando o princípio da superposição.

A equação de compatibilidade é a seguinte:

$$\begin{cases} \delta_{i0} + \delta_{ij}X_i + \delta_{ij+1}X_{i+1} = 0 \\ \delta_{i+1j} + \delta_{i+1j}X_i + \delta_{i+1j+1}X_{i+1} = 0 \end{cases} \quad \text{Equação 1}$$

Onde:

X_i : hiperestáticos, sendo i o índice que varia de 1 a g (grau de hiperestaticidade);

δ_{i0} : termo de carga de rotação ou de deslocamento associado ao hiperestático;

δ_{ij} : coeficiente de flexibilidade podendo ser de deslocamento ou de rotação, e também está associado ao hiperestático.

Podendo ser reescrita na forma matricial:

$$\{\delta_0\} + [\delta]\{X\} = \{0\} \quad \text{Equação 2}$$

Onde:

$\{\delta_0\}$: vetor dos termos de carga;

$[\delta]$: matriz de flexibilidade;

$\{X\}$: vetor dos hiperestáticos

2.3 Método dos Deslocamentos

No Método dos Deslocamentos as incógnitas principais são os deslocamentos em pontos escolhidos na estrutura, eles podem ser obtidos resolvendo um sistema de equações lineares de equilíbrio. Por ser um método muito utilizado em programações automáticas, ele é considerado o mais importante na análise de estruturas (SORIANO E LIMA, 2006).

Segundo Martha (2010) tanto no Método dos Deslocamentos quanto no Método das Forças, para solução de uma estrutura, é necessário se considerar três condições básicas: as condições de equilíbrio, condições de compatibilidade e as leis constitutivas dos materiais, a diferença entre os dois métodos é que estas condições são atendidas de maneira inversa.

2.3.1 Metodologia do método dos deslocamentos

De acordo com Soriano e Lima (2006), o método dos deslocamentos possui a seguinte sistemática:

- Escolha de um sistema principal em que os deslocamentos considerados como graus de liberdade da estrutura estejam restringidos. Esses deslocamentos são as incógnitas primárias a determinar (com sentidos positivos arbitrados);
- Cálculo dos esforços de engastamento perfeito e combinação desses esforços, com sinais contrários com as forças externas diretamente aplicadas segundo os referidos deslocamentos, para obtenção das forças nodais combinadas;
- Cálculo dos coeficientes de rigidez das barras e, a partir desses, obtenção dos coeficientes de rigidez da estrutura;
- Montagem e resolução do sistema de equações de equilíbrio para determinação dos referidos deslocamentos;
- Obtenção dos deslocamentos nodais incógnitos;
- Cálculo dos esforços solicitantes na estrutura;

Martha (2010) ainda resume a metodologia de cálculo da seguinte maneira:

“Somar uma série de soluções básicas (chamadas de casos básicos) que satisfazem as condições de compatibilidade, mas que não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original para na superposição restabelecer as condições de equilíbrio.”

Assim, é possível decompor o sistema principal em diversos outros casos básicos que isoladamente satisfazem as condições de compatibilidade, e após a superposição destes casos, o sistema principal tem suas condições de equilíbrio restabelecidas.

Na figura 2, esta representada como uma estrutura pode ser desmembrada em diversos casos mais simplificados a fim obter-se sua configuração deformada final por meio da superposição dos casos, o caso 0 seria o caso principal, em que se considera apenas o efeito do carregamento, os demais casos isolam apenas os efeitos de cada deslocamento ou rotação separadamente.

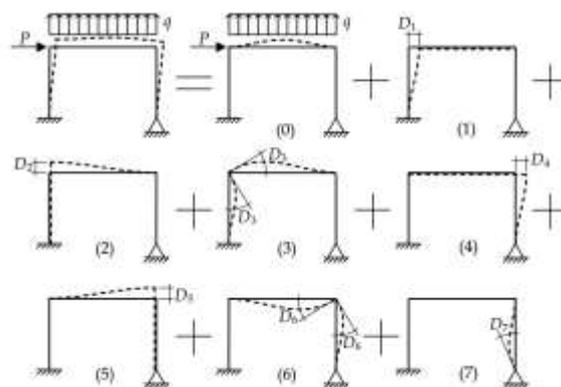


Figura 2: Configuração deformada de um pórtico formada pela superposição da configuração deformada dos casos básicos.

Fonte: MARTHA, 2010.

2.3.2 Soluções para uma barra isolada

Para se trabalhar com o Método dos Deslocamentos é imprescindível a utilização das soluções fundamentais para barras isoladas, ou seja, as reações de engastamento perfeito e os coeficientes de rigidez axial e de rotação nos nós, pois é a partir delas que o método compõe suas soluções fundamentais. Estes parâmetros podem ser encontrados em tabelas obtidas a partir de formulações para estruturas reticuladas.

As reações de engastamento perfeito são as reações de apoio para uma barra com as extremidades engastadas resultantes da aplicação de uma solicitação externa.

Na figura 3 podemos observar quais são as reações de engastamento perfeito de uma barra com comprimento l solicitada externamente por uma carga distribuída linearmente q .

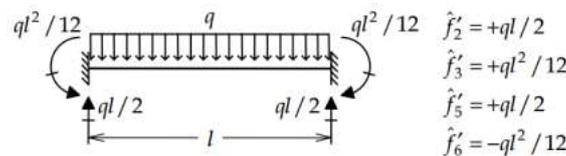


Figura 3: Reações de engastamento perfeito para viga prismática solicitada a uma carga linear.

Fonte: MARTHA, 2010.

Os coeficientes de rigidez K_{ij} são as forças e reações desenvolvidas nas extremidades da barra quando é aplicado um deslocamento unitário em uma de suas extremidades em uma dada direção e mantendo os demais deslocamentos nulos. A figura 4 mostra os coeficientes de rigidez desenvolvidos para cada deslocabilidade da estrutura.

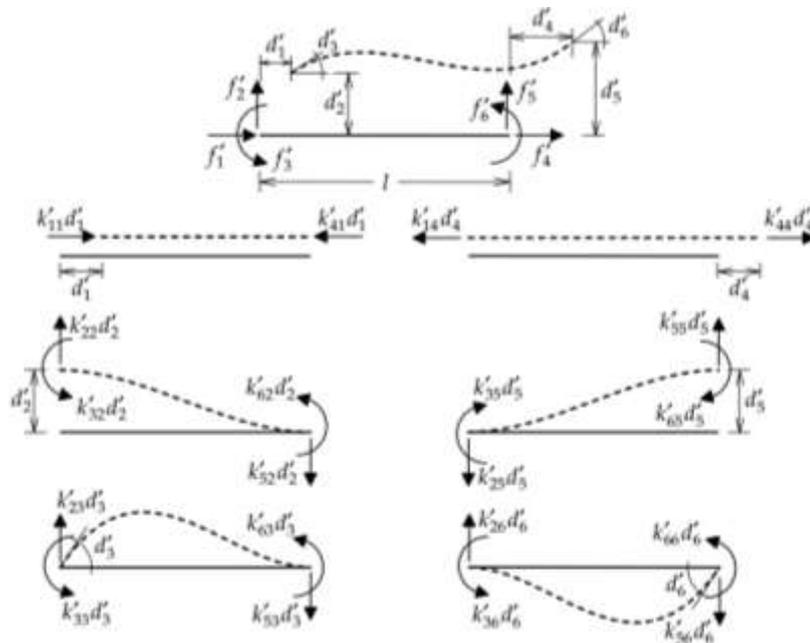


Figura 4: Superposição de configurações deformadas elementares.

Fonte: MARTHA, 2010.

Estes coeficientes podem ser calculados com base no módulo de elasticidade E , área A , inercia I e comprimento l da barra analisada. As figuras 5 e 6 mostram os

coeficientes de rigidez axial e os coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada respectivamente.

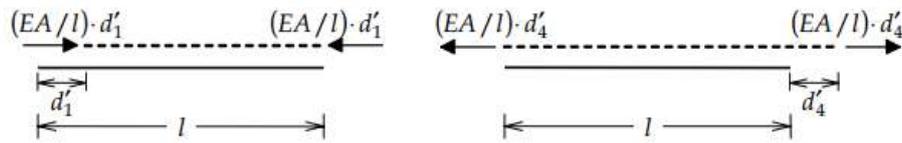


Figura 5: Coeficientes de rigidez axial de uma barra isolada.
Fonte: MARTHA, 2010.

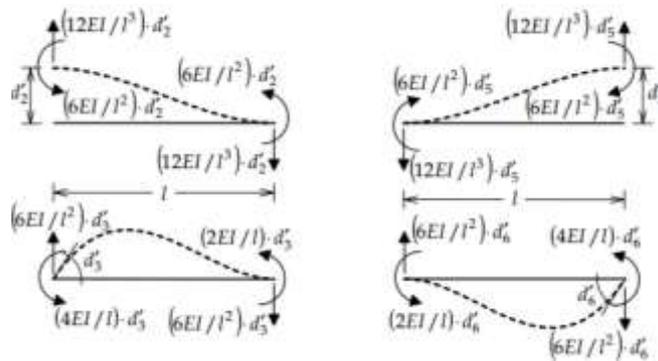


Figura 6: Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada sem articulação.
Fonte: MARTHA, 2010.

2.3.3 Equações do método dos deslocamentos

A equação geral do Método dos Deslocamentos para uma estrutura de n deslocabilidades pode ser definida da seguinte forma:

$$\beta_{i0} + \sum_{j=1}^{j=n} K_{ij} \cdot D_j = 0 \quad \text{Equação 3}$$

Em que:

β_{i0} : reação no apoio fictício associado à deslocabilidade D_j quando as deslocabilidades têm valores nulos;

K_{ij} : coeficiente de rigidez global;

D_j : deslocabilidade analisada que assume valor = 1.

Depois de determinados os valores das deslocabilidades, é possível obter-se os valores finais dos esforços solicitantes da estrutura de maneira análoga, pela superposição dos diagramas de cada um dos casos básicos. Por exemplo, o diagrama de força normal para uma estrutura de n deslocabilidades pode ser definido pela seguinte equação:

$$N = N_0 + N_1 D_1 + N_2 D_2 + \dots + N_n D_n \quad \text{Equação 4}$$

É possível generalizar esta equação para todos os esforços solicitantes da estrutura, normal (N), cortante (C) e momento (M), respectivamente equações 5, 6 e 7:

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{j=n} N_j \cdot D_j \quad \text{Equação 5}$$

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \cdot D_j \quad \text{Equação 6}$$

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^{j=n} M_j \cdot D_j \quad \text{Equação 7}$$

2.3.4 Formulação matricial

O Método dos Deslocamentos pode ser formulado de maneira matricial, sendo que nesta forma recebe o nome de Método da Rigidez Direta, para isso podemos escrever a equação 3 de forma matricial:

$$\{\beta_0\} + [K]\{D\} = \{0\} \quad \text{Equação 8}$$

sendo:

$\{\beta_0\}$: vetor dos termos de carga;

$[K]$: matriz de rigidez global;

$\{D\}$: vetor das deslocabilidades.

O número de equações desta matriz é igual ao número de deslocabilidades da estrutura.

A matriz de rigidez global K é formada pelos coeficientes de rigidez mostrados nas figuras 5 e 6, que podem ser representados de forma matricial como apresentado na figura 7:

$$\begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +12EI/l^3 & +6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & +6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +2EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & +12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +4EI/l \end{bmatrix}$$

Figura 7: Matriz de rigidez de uma barra isolada sem articulação.

Fonte: MARTHA, 2010.

Onde:

E : módulo de elasticidade;

A : área;

I : inércia;

l: comprimento da barra;

2.4 Android

O Android é um sistema operacional baseado no Kernel Linux para dispositivos móveis que foi originalmente desenvolvido em 2003 por Andy Rubin e sua equipe. O sistema foi adquirido pela Google Inc. em 2005 onde desde então ele tem evoluído constantemente, se tornando um sistema confiável e utilizado por várias fabricantes ao redor do mundo (JACKSON, 2011).

De acordo com Jackson (2011) tudo no ambiente de desenvolvimento Android pode ser programado através da combinação da linguagem Java e XML, enquanto o código Java cuida do funcionamento da aplicação, o código XML fica responsável pelos atributos do layout.

2.5 Java

Java é uma linguagem de programação desenvolvida pela Sun Microsystem em 1991, tendo sua primeira versão lançada em 1996. Java é uma linguagem relativamente simples e fácil de ser manipulada sendo que ela é orientada a objetos, o que significa que seu código é estruturado de forma a modelar e representar objetos reais, aproximando mais o sistema a ser criado do que é observado no mundo real (CLARO e SOBRAL, 2008).

A definição de orientação a objeto pode ser contextualizada tomando como exemplo um carro (figura 8). No caso o objeto seria o Carro, onde seus atributos seriam suas portas, rodas, banco, motor e etc. Seus métodos seriam acelerar, frear, etc.

Carro
motor
rodas
acelerar()
frear()

Figura 8: exemplificação de um objeto em uma linguagem orientada a objetos

Fonte: Autor, 2017

2.6 XML

Extensible Markup Language, abreviado como XML é uma linguagem de marcação desenvolvida em 1996. Seu uso primário é para estruturar dados para itens que requerem dados organizados hierarquicamente, tais como lista de endereços, desenhos vetoriais e banco de dados. No desenvolvimento de aplicativos para a plataforma Android, o XML é utilizado para definir atributos do layout do aplicativo, e como existe uma biblioteca de funções pré-programadas para isto, é possível economizar muitas linhas de código e consequentemente tornar o desenvolvimento mais rápido e fácil (JACKSON, 2011).

3. MATERIAL E MÉTODOS

A realização deste trabalho pode ser dividida em quatro partes: a revisão bibliográfica, a estruturação do aplicativo e a programação do aplicativo, para posteriormente fazer a conferência dos resultados do presente trabalho.

3.1 Estruturação

Antes de se começar a parte da programação do aplicativo, foi necessária que a estrutura analítica dele estivesse definida, estabelecendo seus componentes e como iria ocorrer a interação entre eles, todos os métodos, atividades e outros detalhes foram delineados para que o posterior processo de programação se desse de forma mais fácil.

O aplicativo é específico para a análise linear de vigas planas, determinando apenas as reações de apoio e os esforços internos, assim em primeiro momento não foi permitida a inserção de pórticos ou treliças, portanto não foi feita a implementação de algoritmos para a rotação do sistema de coordenadas locais para globais.

3.2 Entrada de dados

Foi necessário definir como o usuário entraria com os dados necessários para a construção da estrutura no âmbito do aplicativo e a sua posterior resolução. Primeiro é necessário que o usuário entre com o número de nós que compõe a estrutura, sendo o mínimo de dois. Após isso, o usuário insere as coordenadas no eixo X dos nós previamente informados, e logo após o usuário entra com os dados de onde estarão os apoios e suas restrições. Com estes dados já inseridos o aplicativo pode calcular qual o número de barras que compõe a estrutura e o tamanho de cada uma, assim sendo possível inserir o valor e a posição das cargas distribuídas, e também o valor e em quais nós atuarão as cargas pontuais.

Tomando a viga da figura 9 como exemplo, definindo o seu módulo de elasticidade $E = 24150 \text{ MPa}$ e seção de $20 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ é possível ilustrar os dados de entrada e seus respectivos parâmetros de acordo com as tabelas 1, 2 e 3.

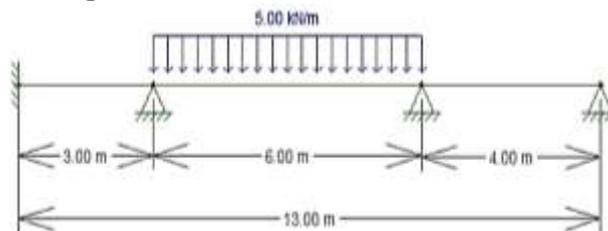


Figura 9: Viga solicitada a esforços externos.

Fonte: Autor, 2017

Tabela 1: Coordenadas Nodais e Condições de Suporte

Nó	X (m)	Y (m)	Desloc. X	Desloc. Y	Rotação Z
1	0	0	Fixo	Fixo	Fixo
2	3	0	Fixo	Fixo	Livre
3	9	0	Fixo	Fixo	Livre
4	13	0	Fixo	Fixo	Livre

Fonte: Autor, 2018

Tabela 2: Dados das Barras

Barra	Nó Inicial	Nó Final	Mod. Elast. (kN/m ²)	Mom. Inércia
1	1	2	2.415e+10	0.002083
2	2	3	2.415e+10	0.002083
3	3	4	2.415e+10	0.002083

Fonte: Autor, 2018

Tabela 3: Dados de Carregamentos Uniformemente Distribuídos em Barras

Barra	Qxi (kN/m)	Qxj (kN/m)	Qyi (kN/m)	Qyj (kN/m)
2	0.0	0.0	-5.0	-5.0

Fonte: Autor, 2018

3.3 Resolução

A resolução da viga inserida no aplicativo segue a seguinte sistemática:

3.3.1 Montagem da matriz de rigidez local das barras que compõe a viga

Para a obtenção das reações de apoio e dos esforços solicitantes os coeficientes de rigidez axial não são necessários já que sua influência em vigas planas bi engastadas é praticamente nula, assim foi utilizada uma versão simplificada da matriz de rigidez mostrada na figura 10 considerando-se apenas os coeficientes de rigidez à flexão, ficando assim representada numa matriz 4x4:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Figura 10: Matriz de rigidez de uma barra isolada sem articulação desconsiderando forças axiais.

Fonte: MARTHA, 2010.

Para cada barra da viga, a matriz de rigidez é calculada e posteriormente são combinadas em apenas uma matriz de rigidez global que representa toda a estrutura, sendo necessária a formulação de uma regra para o correto arranjo destes valores na nova matriz.

Considerando-se uma viga de n nós a sua matriz de rigidez global $M [i, j]$, terá o tamanho de $[n*2, n*2]$, esta viga tem $n-1$ barras e para cada barra é criada uma matriz de rigidez local $m [i, j]$ com tamanho $[4, 4]$, Tomando como exemplo a viga da figura 9 que tem 4 nós, sua matriz de rigidez global teria tamanho $[8, 8]$. Fazendo $M [0, 0]$, a primeira matriz de rigidez local é inserida na matriz de rigidez global a partir de $M [0, 0]$, até $M [3, 3]$. A partir da segunda barra, os índices da matriz de rigidez global $[i,$

$j]$, são diminuídos em 1 e a próxima matriz de rigidez local é inserida. Assim a matriz de rigidez global ficara com índices $M [2, 2]$ e a próxima matriz de rigidez local seria inserida a partir de $M [2, 2]$, até $M [5, 5]$. E assim é feito sucessivamente, até a última barra.

3.3.2 Montagem do vetor de engastamento perfeito

As cargas inseridas nas barras podem variar linearmente, assim é necessário definir equações que as modelem para o cálculo das forças de engastamento perfeito.

Como o trabalho utiliza como base vigas bi engastadas, em cada uma de suas extremidades surgem forças de engastamento perfeito que podemos denominar de M_0 , V_0 , H_0 e M_1 , V_1 e H_1 , como dito anteriormente as forças axiais são desconsideradas, sendo necessário apenas determinar os momentos e as cortantes. Para isso é necessário se fazer a caracterização da carga distribuída, dado que elas variam linearmente é preciso definir uma equação que as modelem. O carregamento pode ser representado como um vetor em que as coordenadas são definidas ao longo da barra em função de um ponto x .

$$\vec{q}(x) = (q_x(x), q_y(x)) \quad \text{Equação 9}$$

Este vetor ainda pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{q}(x) = (q_{x0} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + (q_{x1} \left(\frac{x}{L}\right), (q_{y0} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + (q_{y1} \left(\frac{x}{L}\right))$$

$$\text{Equação 10}$$

Onde:

q_{y0} : Valor da carga distribuída na direção y no nó inicial da barra;

q_{y1} : Valor da carga distribuída na direção y no nó final da barra;

x : Ponto da barra a contar do nó inicial, onde se mede o valor da carga;

L : Comprimento total da barra.

Sussekind (1987) já nos traz a determinação dos momentos destes apoios, sendo eles:

$$M_0 = -\frac{1}{120}(6q_{y0} + 4q_{y1})L^2 \quad \text{Equação 11}$$

$$M_1 = \frac{1}{120}(4q_{y0} + 6q_{y1})L^2 \quad \text{Equação 12}$$

Fazendo a soma dos momentos no nó final da barra é possível fazer a seguinte dedução:

$$\begin{aligned} \sum M_1 = 0 &\rightarrow M_0 + M_1 - V_0L - \int_0^L q_y(x)dx = 0 \\ &\rightarrow V_0L = M_0 + M_1 - \int_0^L q_y dx \end{aligned}$$

$$V_0L = M_0 + M_1 - \left[q_{y0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right) + q_{y1} \left(\frac{x}{L} \right) \right]_0^L$$

$$V_0L = -\frac{1}{120}(6q_{y0} + 4q_{y1}) + -\frac{1}{120}(6q_{y0} + 4q_{y1}) - \frac{1}{6}(2q_{y0} + q_{y1})L^2$$

Assim:

$$V_0 = -\frac{1}{20}(7q_{y0} + 3q_{y1})L \quad \text{Equação 13}$$

$$V_1 = -\frac{1}{20}(3q_{y0} + 7q_{y1})L \quad \text{Equação 14}$$

Como no caso da matriz de rigidez para cada barra da viga, um vetor de engastamento perfeito local é calculado, posteriormente devem ser combinados em apenas um vetor global que representa toda a estrutura, sendo também necessária a formulação de uma regra para o correto arranjo destes valores no novo vetor.

Considerando-se uma viga de n nós o seu vetor de engastamento perfeito global $V[i]$, terá um tamanho $[n*2]$. Para cada barra é criado um vetor de engastamento perfeito local $v[i]$, com tamanho $[4]$. Fazendo $V[0]$, o primeiro vetor local é inserido no vetor global a partir de $V[0]$ até $V[3]$. A partir da segunda barra, o índice do vetor de engastamento perfeito global é diminuído em 1 e o novo vetor é inserido. Assim, o vetor de engastamento perfeito global ficaria com índice $V[2]$ e o próximo vetor de engastamento perfeito local seria inserido a partir de $V[2]$ até $V[5]$, e assim é feito sucessivamente até a última barra.

3.3.3 Montagem do vetor de ações nodais

De acordo com os dados inseridos pelo usuário, um vetor de ações nodais é montado tendo tamanho $n*2$, sendo n o número de nós, isso por que para cada nó é possível a inserção de até duas cargas, sendo uma na direção Y e outra na direção Z representando um momento.

3.3.4 Montagem do vetor de Reações e Deslocabilidades

É necessária também a criação de mais dois vetores, um que guarda os valores das reações e outro que guarda o valor das deslocabilidades, ambos os vetores tem tamanho $n*2$, sendo n o número de nós.

3.3.5 Montagem do sistema de equações

Com as matrizes e vetores anteriormente definidas é possível definir um sistema de equações que pode ser resolvido utilizando-se o método de eliminação de Gauss

$$\begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \dots \\ R_{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_{(j)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \dots \\ E_{(j)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} & K_{0,2} & K_{0,3} & \dots & K_{0,j} \\ K_{1,0} & K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & \dots & K_{1,j} \\ K_{2,0} & K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & \dots & K_{2,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{j,0} & K_{j,1} & K_{j,2} & K_{j,3} & \dots & K_{j,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \dots \\ D_{(j)} \end{Bmatrix}$$

Equação 15

Onde:

R = Vetor de reações

A = Vetor de ações nodais

E = Vetor de engastamento perfeito

K = Matriz de rigidez

D = Vetor de deslocabilidades

Após a resolução deste sistema já é obtido os valores das reações de apoio da estrutura inserida.

3.3.6 Cálculo dos esforços solicitantes

Sussekind (1981) define três equações para a determinação dos diagramas da barra:

$$\begin{cases} N(x) = \int q_x(x) dx \\ V(x) = \int q_y(x) dx \\ M(x) = \int \int q_x(x) dx \end{cases} \quad \text{Equação 16}$$

Como neste trabalho apenas será apresentado os diagramas de cortante e momento, podemos ignorar a equação para a determinação dos esforços normais.

Para o cálculo dos esforços cortantes podemos deduzir:

$$V(x) = \int q_y(x) dx = \int \left(q_{y0} \left(1 - \frac{x}{L} \right) + q_{y1} \left(\frac{x}{L} \right) \right) dx$$

$$V(x) = q_{y0} \left(x - \frac{x^2}{2L} \right) + q_{y1} \left(\frac{x^2}{2L} \right) + C_1$$

$$V(x=0) = V_0 \quad \therefore C_1 = V_0$$

$$V(x) = V_0 + q_{y0} \left(x - \frac{x^2}{2L} \right) + q_{y1} \left(\frac{x^2}{2L} \right) \quad \text{Equação 17}$$

E para o cálculo do momento fletor:

$$M(x) = \iint q_y(x) dx dx = - \iint \left(q_{y0} \left(1 - \frac{x}{L} \right) + q_{y1} \left(\frac{x}{L} \right) \right) dx dx$$

$$M(x) = q_{y0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) - q_{y1} \left(\frac{x^3}{6L} \right) + C_2 x + C_3$$

$$M(x=0) = M_0 \quad \therefore C_3 = M_0$$

$$\frac{dM(x=0)}{dx} = -V_0 \therefore C_2 = -V_0$$

$$M(x) = M_0 - V_0x - q_{y0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) - \left(q_{y1} \left(\frac{x^3}{6L} \right) \right) \quad \text{Equação 18}$$

Inserindo estas equações no aplicativo a calculando $V(x)$ e $M(x)$ para valores de x que variam de zero até o tamanho da viga é possível obter os valores das cortantes e momentos.

3.4 Apresentação do aplicativo

A seguir estão algumas figuras que mostram como é a interface do aplicativo e como é feita a inserção dos dados.

Para a sua utilização o usuário deve ter um conhecimento básico de estruturas, pois é necessário saber o que são e quantos são os nós que compõe a viga, quais são os tipos de apoio e suas restrições e a o que são as cargas pontuais e cargas distribuídas.

Foi feito um grande esforço no tratamento de erros do aplicativo para impedir que o usuário insira dados não compatíveis com os solicitados, o que poderia gerar uma falha e fechamento inesperado do aplicativo.

A figura 11 a) é a tela principal do aplicativo, onde se pede quantos nós vão compor a viga, sendo que o mínimo é de dois nós, se o usuário tentar inserir um número menor do que isso o aplicativo impede que ele prossiga. A figura 11 b) é a segunda tela, onde o usuário insere as coordenadas para cada um dos nós da viga.

Em ambas as telas, temos um botão Ok em que o usuário pode pressionar para seguir para a próxima tela.



a) b)

Figura 11: Telas 1 e 2 do aplicativo.

Fonte: Autor, 2018.

A figura 12 a) é a terceira tela do aplicativo, onde se pede para marcar quais nós conterão apoio. A figura 12 b) é a quarta tela, onde o usuário insere qual o tipo de restrição de cada apoio, de acordo com os que foram selecionados anteriormente. Para a

estrutura não ser instável o aplicativo impede que o usuário insira uma viga com menos de três restrições de apoio.



a) b)

Figura 12: Telas 2 e 3 do aplicativo.

Fonte: Autor, 2018.

Na figura 13 é possível observar a quinta tela do aplicativo onde o usuário pode escolher entre inserir cargas distribuídas, cargas pontuais e, posteriormente, calcular e obter os resultados da viga.



Figura 13: Tela 5 do aplicativo.

Fonte: Autor, 2018.

Na figura 14 a) vemos a tela de inserção das cargas distribuídas, aqui o usuário pode inserir cargas que variam linearmente. Em Q_i é inserida a carga no início da barra e em Q_j é inserida a carga no final da barra, caso a carga seja uniforme ao longo do comprimento, basta inserir o mesmo valor nos dois campos. Após a carga ser salva o usuário deve inserir ela em uma das barras da viga e tem a opção de criar uma nova carga. Quando pronto basta pressionar o botão Ok para voltar à tela de escolha de cargas.

A figura 14 b) mostra a tela onde o usuário pode inserir as cargas pontuais da viga, as forças na direção de X são ignoradas pois em primeira mão elas não serão utilizadas neste trabalho. Após serem salvas o usuário pode inserir as cargas em um nó, criar uma nova carga ou voltar a tela de escolha de cargas.



a) b)

Figura 14: Telas 6 e 7 do aplicativo.

Fonte: Autor, 2018.

As telas a onde são mostrados os resultados das reações de apoio e os diagramas de força cortante e momentos fletores serão mostras na próxima sessão.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a análise dos resultados obtidos no aplicativo, foi feita uma comparação com base nos dados obtidos pelo *software* Ftool 4.0.0, sendo validadas duas vigas.

4.1 Viga 01

A primeira viga lançada foi a da figura 15:

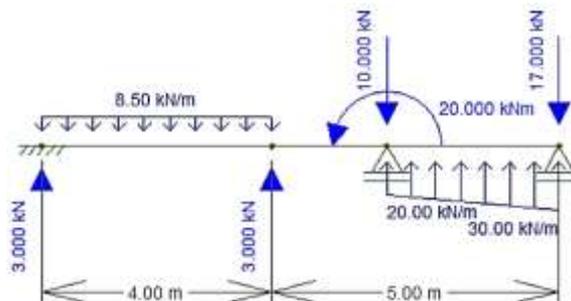


Figura 15: Viga para 01

Fonte: Autor, 2018.

Os resultados obtidos para as reações de apoio são mostrados na figura 16.

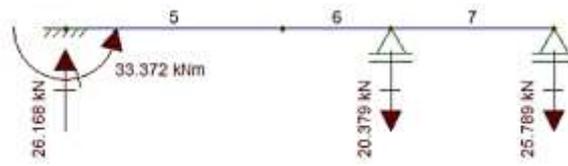


Figura 16: Reações de apoio obtidos no Ftool 4.0.0 para viga 01.

Fonte: Autor, 2018.

Podemos observar na figura 17 que os primeiros resultados obtidos com o aplicativo mostrando as reações de apoio coincidiram com os resultados obtidos no *software* Ftool 4.0.0



Figura 17: Reações de apoio obtidos no aplicativo para viga 01.

Fonte: Autor, 2018.

Os diagramas de força cortante e de momentos fletores são os ilustrados na figura 18 e 19 respectivamente:

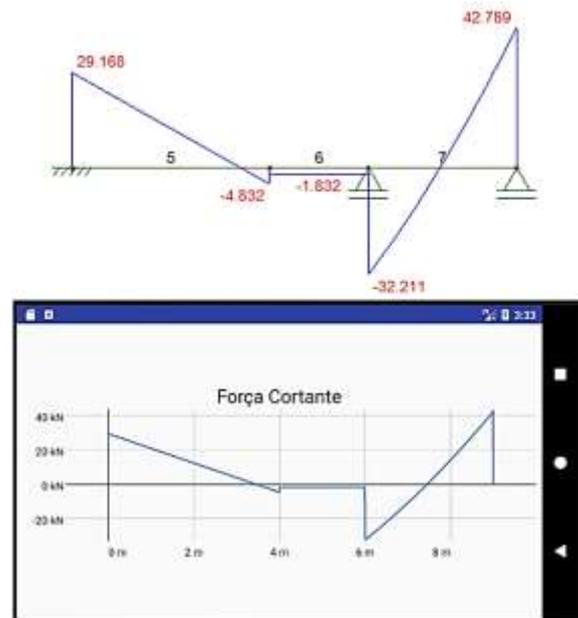


Figura 18: Comparação entre os diagramas de esforços cortantes obtidos no Ftool 4.0.0 e no aplicativo para viga 01.

Fonte: Autor, 2018.

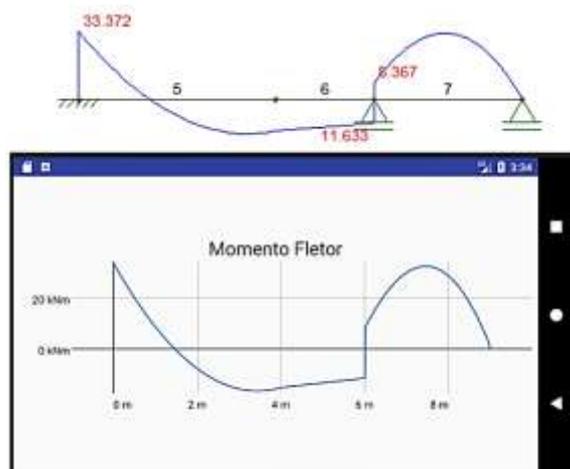


Figura 19: Comparação entre os diagramas de momentos fletores obtidos no Ftool 4.0.0 e no aplicativo

Fonte: Autor, 2018

Observando a figura 18 e a figura 19, os resultados obtidos coincidiram com os resultados obtidos no *software* Ftool 4.0.0.

4.2 Viga 02

Para melhor análise dos resultados também foi feita a comparação com uma segunda viga, mostrada na figura 20:

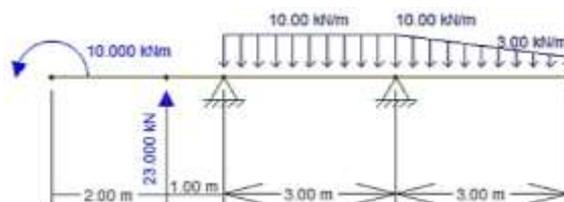


Figura 20: Viga para 02

Fonte: Autor, 2018.

Os resultados obtidos para as reações de apoio estão na figura 21.



Figura 21: Reações de apoio obtidos no Ftool 4.0.0 para viga 02.

Fonte: Autor, 2018.



Figura 22: Reações de apoio obtidos no aplicativo para viga de 02.
Fonte: Autor, 2018.

Os diagramas de força cortante e de momentos fletores são os ilustrados na figura 23 e 24 respectivamente:

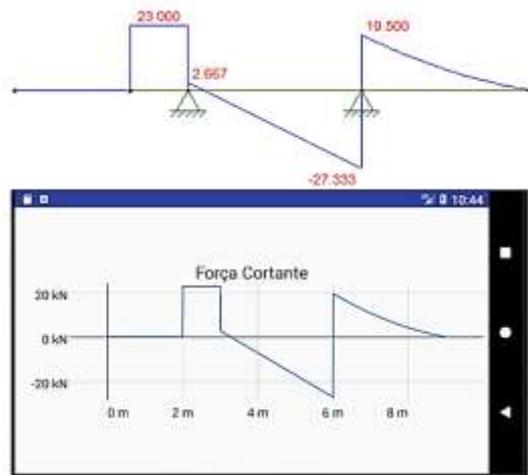


Figura 23: Comparação entre os diagramas de esforços cortantes obtidos no Ftool 4.0.0 e no aplicativo para a viga de comparação 2.
Fonte: Autor, 2018

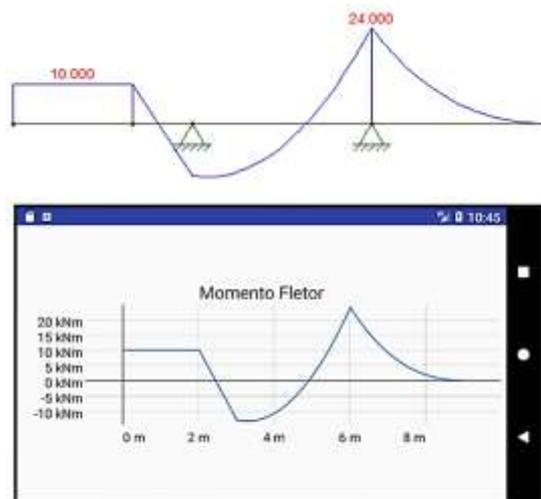


Figura 24: Comparação entre os diagramas de momentos fletores obtidos no Ftool 4.0.0 e no aplicativo para viga 02.
Fonte: Autor, 2018

Mais uma vez os resultados obtidos pelo aplicativo se mostraram corretos, tanto os valores de reações mostrados na figura 22, como os digramas mostrados nas figuras 23 e 24 coincidiram com os resultados obtidos no *software* Ftool 4.0.0.

Muitas outras vigas com diferentes configurações e cargas foram testadas para garantir a exatidão e confiabilidade dos resultados fornecidos pelo aplicativo, mas para fins de validação do trabalho apenas duas foram demonstradas.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho desenvolveu um aplicativo em plataforma Android para a análise linear estrutural de vigas planas, para a obtenção das reações de apoio e dos esforços solicitantes. A análise se deu a partir dos dados inseridos pelo usuário no aplicativo, como a quantidade de nós que compõe a viga, as coordenadas dos nós, os tipos de apoios e as cargas presentes.

Fazendo uma comparação dos resultados obtidos no aplicativo com os resultados obtidos no *software* Ftool 4.0.0, pode se observar que o aplicativo oferece resultados com ótima precisão, tanto para os valores das reações de apoio como para os diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores.

Portanto, a utilização deste aplicativo é viável, podendo ser utilizado dentro de sala de aula como uma ferramenta de apoio na interação ensino-aprendizagem, devido a sua portabilidade e facilidade de uso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 2a ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. S. **Análise de Estruturas: Método das forças e Método dos Deslocamentos**. 2a ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2006.

GOMES, J; VELHO, L. **Computação Gráfica – Vol. 1, Série de Computação e Matemática** – Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 1998.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1ª. ed. [S.l.]: [s.n.], 2003

FELIPPA, C.A. **Introduction to Finite Element Methods, Notas de Aula da disciplina “Introduction to Finite Elements Methods (ASEN 5007)**. Aerospace Engineering Sciences Department, University of Colorado at Boulder”

SUSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. 7. ed. Rio de Janeiro, Editora Globo, 1987.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. Rio de Janeiro, Editora Globo, 1981.

CLARO, D. B.; SOBRAL, J. B. M. **Programação em JAVA**. Florianópolis: Copyleft Pearson Education, 2008.

JACKSON, W. **Android Apps for Absolute Beginners**. 1. ed. New York: Springer Science+Business Media, 2011.

LONGO, L.F. **Desenvolvimento de um Aplicativo de Análise de Estruturas Reticuladas Planas em PlataformaAndroid**, 2015, 218p. Trabalho de Conclusão de Curso, Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, SC.

ZHANG, G. **Smartphones Now Account for Half The World's Mobile Connections**. GSMA Intelligence, 2017. Disponível em: <<https://www.gsmainelligence.com/research/?file=66baa3fc91a95337ff99e4e9214e2185&download>>. Acesso em: 16 nov. 2017.

BHOJASIA, M.K, **Java Program to Solve any Linear Equations**. Disponível em: <<https://www.sanfoundry.com/java-program-solve-linear-equation/>>. Acesso em: 11 abr. 2018.